



## Zastosowanie Metody Elementów Skończonych w obliczeniach statycznych konstrukcji ciągnowych

MARIUSZ RUCHWA<sup>1</sup>, MONIKA MATUSZKIEWICZ<sup>2</sup>

Politechnika Koszalińska, <sup>1</sup>Katedra Mechaniki Budowli, <sup>2</sup>Katedra Konstrukcji Metalowych,  
75-453 Koszalin, ul. Śniadeckich 2

**Streszczenie.** W publikacji zwrócono uwagę na możliwości Metody Elementów Skończonych (MES) w nieliniowej analizie statycznej konstrukcji ciągnowych oraz problemy pojawiające się w trakcie obliczeń. Zawarto informacje pomocne w modelowaniu i rozwiązywaniu tego typu zadań przy pomocy oprogramowania ABAQUS. Porównano rezultaty numeryczne uzyskiwane za pomocą MES z dostępnymi w literaturze wynikami ścisłych i przybliżonych obliczeń analitycznych. Przeliczeniu podlegały przykłady dotyczące analizy pojedynczych ciągów o różnych wartościach zwisu, różnych wartościach kąta nachylenia cięciwy oraz różnych sposobach obciążenia. Analizowano także przykład konstrukcji złożonej, w obliczeniach której pojawiły się wymienione wcześniej cechy oraz dodatkowo uwzględniono współpracę wielu ciągów z elementami typowej konstrukcji prętowej. Rozwiązując zadania Metodą Elementów Skończonych, zastosowano podstawowe rodzaje elementów, liniowosprężysty opis materiałowy, różnego typu obciążenia statyczne, uwzględniono również zwis oraz sprzężanie ciągów, nieliniowości geometryczne oraz współpracę ciągów z innymi elementami konstrukcyjnymi. Zwrócono uwagę na zgodności oraz różnice wyników obliczeń MES i obliczeń analitycznych, dotyczące rozkładu przemieszczeń oraz sił przekrojowych, uzyskiwane w podstawowych oraz złożonych przykładach analiz.

**Słowa kluczowe:** statyka, konstrukcje ciągnowe, Metoda Elementów Skończonych

**Symbole UKD:** 621.86.065

### 1. Wprowadzenie

Specyfika konstrukcji ciągnowych związana z silnie nieliniowym charakterem odpowiedzi konstrukcji powoduje utrudnienia obliczeniowe i skutkuje w praktyce obliczeniowej różnymi podejściami odwołującymi się zwykle do zastosowania tzw. ścisłych rozwiązań analitycznych pewnych szczególnych przypadków obciążenia ciągna [1, 2]. Tym samym możliwości szerszej analizy tego typu konstrukcji są

ograniczone. Popularne narzędzie obliczeniowe, jakim jest Metoda Elementów Skończonych (MES), pozwala na wszechstronną analizę konstrukcji [3, 4, 5], jednak w przypadku układów cięgnowych jej możliwości zwykle nie są w pełni wykorzystane z powodu pojawiających się trudności w uzyskiwaniu zbieżności rozwiązań oraz problemów dotyczących zgodności wyników obliczeń MES oraz obliczeń analitycznych.

Równania statyki pojedynczego cięgna oraz analityczne sposoby ich rozwiązania są powszechnie znane. W literaturze można znaleźć wiele przykładów rozwiązań zadań statyki konstrukcji cięgnowych przy użyciu różnych metod analitycznych, bazujących na ścisłych lub przybliżonych równaniach równowagi cięgna, oraz metod numerycznych. Wielu autorów rozwiązuje zadania tego typu przy zastosowaniu dedykowanych programów komputerowych bądź przy pomocy popularnych programów analizy konstrukcji Metodą Elementów Skończonych, nie zastanawiając się, jakie mogą występować różnice pomiędzy „ściślymi rozwiązaniami” problemu oraz numerycznymi. W niewielu źródłach można się spotkać z porównaniami rezultatów uzyskanych różnymi metodami, zwłaszcza dotyczącymi porównania wyników MES i wyników metod analitycznych. A wiedza na temat zgodności oraz różnic pomiędzy wynikami uzyskiwanymi różnymi metodami jest ważna do oceny poprawności prowadzonych analiz.

W niniejszej pracy autorzy postanowili dokonać porównania rezultatów obliczeń Metodą Elementów Skończonych, przeprowadzonych przy pomocy oprogramowania ABAQUS [6], z wynikami obliczeń analitycznych. Trzy pierwsze przykłady są w istocie analizami parametrycznymi dostarczającymi wiedzy na temat zakresu zgodności wyników oraz różnic wyników, jakie mogą wystąpić. Dodatkowo rozwiązane zostało zadanie dotyczące konstrukcji złożonej, cięgnowo-prętowej.

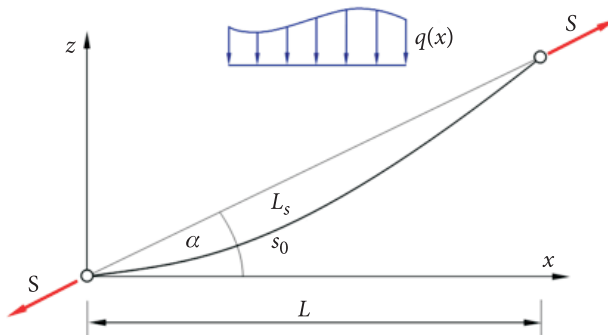
## 2. Statyka pojedynczego cięgna

Cięgna mogą przenosić wyłącznie rozciągające siły normalne, z uwagi na ich bardzo małą, pomijaną w modelach teoretycznych, sztywność na zginanie. Opis równowagi statycznej cięgna jest zależny od sposobu obciążenia, sztywności cięgna na rozciąganie oraz jego początkowej długości.

Jeśli w analizie będzie rozpatrywane obciążenie ciągle działające na jednostkę długości cięgna zgodnie z jego kształtem (rys. 1), to zależność ściśle opisująca relacje w cięgnię o cięciwie nachylonej przyjmie postać równania [1]

$$\int_0^L \sqrt{1 + \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{Q(x)}{S \cos \alpha} \right)^2} dx = s_0 (1 + \alpha, \Delta T) + \frac{S \cos \alpha}{EA} \int_0^L \left[ 1 + \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{Q(x)}{S \cos \alpha} \right)^2 \right] dx, \quad (1)$$

gdzie:  $s_0$  — początkowa długość ciężna;  
 $EA$  — sztywność ciężna na rozciąganie;  
 $\alpha$  — kąt nachylenia ciężni ciężna do poziomu;  
 $\alpha_t$  — współczynnik wydłużalności liniowej;  
 $S$  — siła naciągu ciężna;  
 $\Delta T$  — przyrost temperatury;  
 $Q(x)$  — równanie siły tnącej, jak w przypadku belki swobodnie podpartej o rozpiętości  $L$  obciążonej  $q(x)$ ;  
 $L$  — rozpiętość ciężna (długość rzutu poziomego ciężni ciężna).



Rys. 1. Ciężno ukośne pod obciążeniem  $q(x)$

Równanie (1) nazywane *ściśłym równaniem ciężna* może być stosowane w przypadkach dowolnie dużych zwisów ciężien oraz dowolnie dużych kątów nachylenia ciężni. Stanowi podstawę ścisłego analitycznego rozwiązywania zadań statyki konstrukcji ciężnowych. Wyznaczenie siły naciągu ciężna ( $S$ ) pozwala na określenie linii zwisu ciężna na podstawie prostej zależności

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{M(x)}{S \cos \alpha}, \quad (2)$$

w której  $M(x)$  jest równaniem momentu zginającego, jak w przypadku belki swobodnie podpartej poddanej obciążeniu  $q(x)$ . W równie prosty sposób można określić wszystkie pozostałe wielkości statyczne i kinematyczne w zadaniu oraz wyznaczyć aktualną długość ciężna.

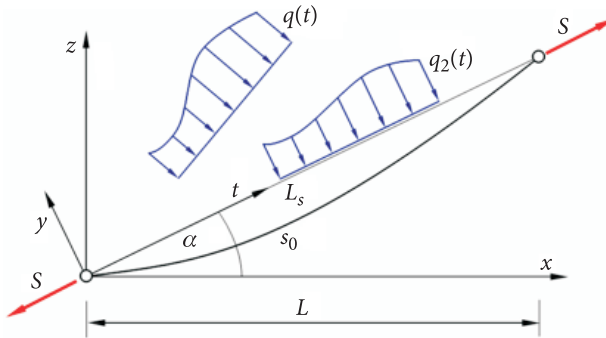
Stosowanie ścisłego równania ciężna w celu znalezienia siły naciągu jest związane z trudnościami obliczeniowymi, stąd też w większości praktycznych, analitycznych podejść korzysta się z przybliżonej zależności na wyznaczenie aktualnej długości ciężna, co prowadzi do *przybliżonego równania ciężna*

$$S^3 + S^2 EA \left[ 1 - \frac{1}{s_0} (L_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA \cos \alpha}{2s_0} \int_0^L [Q(x)]^2 dx, \quad (3)$$

w którym  $L_s$  oznacza długość cięgiwy ciągną.

Przybliżenie, jakie zastosowano do wyprowadzenia równania (3), w przypadku poziomego ciągną obciążonego równomiernie, jest równoznaczne z przyjęciem obciążenia po długości cięgiwy, zamiast po długości ciągną. Równanie (3) jest wykorzystywane w wielu praktycznych zadaniach dotyczących tzw. płaskich ciągn, czyli takich, w których stosunek zwisu ciągną do jego rozpiętości jest mniejszy od 0,1.

W obliczeniach praktycznych ciągną są obciążone w sposób złożony na wielu kierunkach (rys. 2).



Rys. 2. Ciężno w złożonym stanie obciążenia

Często stosowanym w takiej sytuacji przybliżeniem jest pominięcie wpływu składowej podłużnej obciążenia (względem ciągną). Przybliżenie takie prowadzi do nowej postaci *przybliżonego równania ciągną*

$$S^3 + S^2 EA \left[ 1 - \frac{1}{s_0} (L_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA}{2s_0} \int_0^{L_s} [Q(t)]^2 dt, \quad (4)$$

gdzie  $Q(t)$  jest równaniem siły tnącej, jak w przypadku belki swobodnie podparłej o rozpiętości  $L_s$  obciążonej  $q_z(t)$ . Tym samym pomija się wpływ zmiany siły naciągu ciągną po jego długości oraz wpływ składowej podłużnej obciążenia na wydłużenie ciągną.

Równanie (4) jest niekiedy stosowane nawet przy kątach nachylenia cięgiwy sięgających  $60^\circ$ , mimo że zastępczy układ obciążeń nie jest równoważny z pierwotnym układem.

### 3. Analiza MES konstrukcji ciągnowych

Rozwiązując zadania statyki konstrukcji ciągnowych Metodą Elementów Skończonych, konieczne jest dokonanie podziału ciągu na wiele elementów skończonych. Ilość i rodzaj elementów w oczywisty sposób wpływają na jakość uzyskiwanych rozwiązań. Możliwe jest zastosowanie dowolnie skomplikowanego opisu zależności na poziomie elementu skończonego, ale można również uzyskać dobre wyniki przy zastosowaniu tradycyjnych, przestrzennych, prostoliniowych, kratowych lub belkowych elementów skończonych o liniowych funkcjach kształtu. O ile zastosowanie elementów kratowych wymaga dodatkowych zabiegów numerycznych w celu uzyskania stabilności rozwiązywanego nieliniowego zadania, o tyle zastosowanie elementów belkowych powoduje mniejsze zakłócenia. Konieczne jest, aby element belkowy posiadał stopnie swobody na kierunku podłużnym pozwalające na przenoszenie sił normalnych (w niektórych programach brakuje rozróżnienia elementów na belkowe oraz ramowe). W opisie charakterystyk przekrojowych elementów należy podać bardzo małą wartość sztywności na zginanie w porównaniu ze sztywnością na rozciąganie.

Zdecydowana większość analiz statyki konstrukcji ciągnowych wykazuje wyłącznie nieliniowości o charakterze geometrycznym i dlatego wystarczający, powszechnie stosowany jest opis właściwości materiałowych jako liniowosprężysty.

Tworząc model numeryczny analizowanej konstrukcji ciągnowej, bardzo ważne jest, aby sposób zadania obciążenia wiernie odzwierciedlał fizyczne oddziaływanie obciążenia na konstrukcję. W przypadku ciężaru własnego ciągu lub obciążenia działającego po długości ciągu należy zadbać o to, aby i w modelu numerycznym obciążenie było zadane w taki sposób, przy zachowaniu właściwych wartości i kierunków.

Ponieważ w niektórych konstrukcjach początkowa długość ciągu jest dłuższa od długości cięciwy, można wprowadzić w analizie numerycznej dodatkowy wstępny etap obliczeniowy, w którym ciągną o zadanej długości, zgodnej z długością cięciwy, będzie obciążone termicznie w taki sposób, aby wywołać wydłużenie ciągu do zakładanej w modelu fizycznym długości początkowej. Podobny zabieg można wykonać również w sytuacji zadawania skrócenia (sprężania) ciągu. Dopiero po takich wstępnych etapach obliczeń należy przejść do obliczeń zasadniczych.

Sposób rozwiązywania nieliniowych równań równowagi w przypadku konstrukcji ciągnowych nie odbiega zasadniczo od rozwiązywania innych zadań statyki nieliniowej. Możliwe jest zastosowanie typowych metod przyrostowych, jednak z uwagi na konieczność zachowania stabilności rozwiązywanego nieliniowego problemu wskazane jest zastosowanie mechanizmów stabilizacji wykonywanego procesu obliczeniowego. Dodatkowo należy zwrócić uwagę na ilość dozwolonych przyrostów oraz równoważeń w procesie rozwiązywania układu równań. Z uwagi na problemy w uzyskaniu zbieżności należy założyć większą niż w innych analizach

liczbę przyrostów oraz równoważeń. Także zadawany na starcie obliczeń początkowy przyrost obciążenia powinien być dostosowany — zmniejszony, nawet na poziomie  $10^{-6}$  wartości obciążenia końcowego.

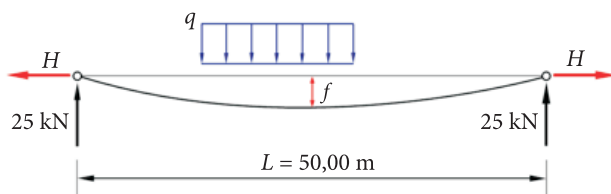
#### 4. Przykłady analiz pojedynczego cięgna

Zasadnicze obliczenia w prezentowanych przykładach wykonano Metodą Elementów Skończonych przy zastosowaniu oprogramowania ABAQUS. W celach porównawczych wykorzystano znane z literatury przykłady oraz ich ściśle i przybliżone rozwiązania [1], a w przypadku ich braku, autorzy uzupełnili wartości, wykorzystując takie same procedury obliczeń analitycznych bazujących na wzorach (1), (3) i (4).

Tworząc modele numeryczne cięgien, przyjęto założenie zgodne z opisem z punktu 3 — liniowosprężysty opis materiałowy, belkowe elementy skończone o liniowych funkcjach kształtu (2 węzłach i 12 stopniach swobody). Każde z analizowanych cięgien było dzielone na 250 elementów skończonych. Długość początkowa cięgien była wprowadzana z zastosowaniem zmiany temperatury we wstępnym etapie obliczeń. Obciążenie w każdym z przypadków było modelowane zgodnie z rzeczywistym sposobem działania obciążenia na cięgna.

##### 4.1. Analiza cięgna o poziomej cięciwie

Rozpatrywany przykład dotyczy cięgna o poziomej cięciwie (rys. 3), na które działa obciążenie pionowe zadane po długości cięgna. Sztywność cięgna na rozciąganie ( $EA$ ) wynosi 45 MN, a rozpiętość ( $L$ ) 50,00 m. Analizowana jest odpowiedź cięgna przy zmieniającej się długości początkowej ( $s_0$ ) w zakresie  $50,25 \div 55,00$  m. Łączna wartość równomiernie rozłożonego obciążenia w każdym przypadku wynosi 50 kN.



Rys. 3. Schemat cięgna o poziomej cięciwie

Wybrane wyniki MES zestawiono w tabelach 1 i 2, łącznie z wynikami uzyskanymi na drodze ścisłego analitycznego rozwiązania (rozw. ściśle) oraz analitycznego rozwiązania uproszczonego 1 (rozw. upr. 1) polegającego na zastosowaniu równania (3). Wyniki analityczne zaczerpnięto z pracy [1].

Wyniki dotyczące przemieszczeń (tab. 1) wskazują na dobry poziom zgodności pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i rozwiązaniem MES. Również zgodność pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i rozwiązaniem uproszczonym jest dobra. Różnice pomiędzy wynikami zwiększają się wraz ze wzrostem tzw. zwisu ciężna, zależnego głównie od długości początkowej ciężna (1,8% — największy błąd MES, 3,9% — największy błąd rozwiązania uproszczonego).

TABELA 1

Wartości bezwymiarowego zwisu ciężna ( $f/L$ ) oraz procentowe odchylenie wartości przybliżonych od wyników ścisłych w zależności od bezwymiarowej długości początkowej ciężna poziomego ( $s_0/L$ )

$s_0/L$	Wartości $f/L$			Odchylenie wartości od rozwiązania ścisłego	
	rozw. ścisłe	rozw. upr. 1	rozw. MES	rozw. upr. 1	rozw. MES
1,005	0,054	0,053	0,054	1,9%	0,7%
1,010	0,068	0,067	0,068	1,5%	0,4%
1,015	0,080	0,079	0,080	1,3%	0,1%
1,020	0,091	0,090	0,091	1,1%	0,1%
1,030	0,110	0,108	0,110	1,8%	0,3%
1,040	0,127	0,124	0,127	2,4%	0,2%
1,100	0,203	0,195	0,207	3,9%	1,8%

W przypadku analizy wartości sił naciągu pozioma reakcja  $H$  jest zgodna z wartością siły naciągu w połowie rozpiętości ciężna, można zauważyć, że wyniki obu metod przybliżonych (MES i metoda uproszczona) pogarszają się z wzrostem zwisu ciężna i tym razem sięgają 6,5% — największy błąd MES oraz 4,2% — największy błąd rozwiązania uproszczonego.

TABELA 2

Wartości poziomej reakcji ( $H$ ) oraz procentowe odchylenie wartości przybliżonych od wyników ścisłych w zależności od bezwymiarowej długości początkowej ciężna poziomego ( $s_0/L$ )

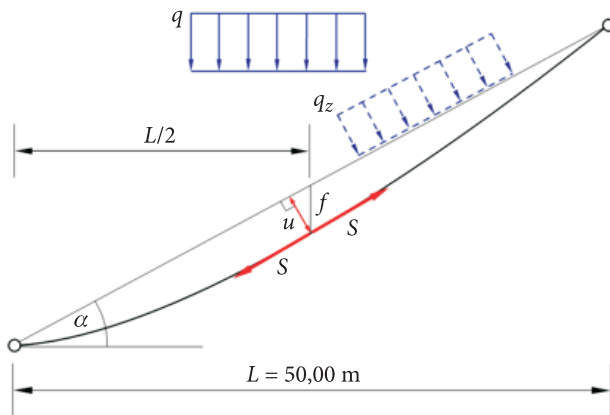
$s_0/L$	Wartości siły $H$ [kN]			Odchylenie wartości od rozwiązania ścisłego	
	rozw. ścisłe	rozw. upr. 1	rozw. MES	rozw. upr. 1	rozw. MES
1,005	116,4	116,9	116,10	0,4%	0,3%
1,010	92,2	92,8	91,70	0,7%	0,5%
1,015	78,1	78,8	77,42	0,9%	0,9%
1,020	68,7	69,5	67,91	1,2%	1,2%

cd. tabeli 2

1,030	56,8	57,6	55,76	1,4%	1,8%
1,040	49,3	50,3	48,11	2,0%	2,4%
1,100	30,8	32,1	28,79	4,2%	6,5%

#### 4.2. Analiza cięgna o ukośnej cięciwie

W przykładzie dotyczącym cięgna o cięciwie ukośnej zakres analizy został rozszerzony o wykonanie obliczeń uproszczonych 2 (rozw. upr. 2) związanych z zastosowaniem wzoru (4). W przykładzie rozpatruje się cięgno o cięciwie nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu, obciążone równomiernie po długości cięgna obciążeniem pionowym (rys. 4). Stałymi elementami zadania są: sztywność cięgna na rozciąganie —  $EA = 50$  MN, długość rzutu poziomego cięgna (rozpiętość) —  $L = 50,00$  m oraz wartość obciążenia na jednostkę długości cięgna —  $q = 1,00$  kN/m. W analizie zmieniano bezwymiarową długość początkową ( $s_0/L_s$ ) w zakresie  $1,001 \div 1,005$  oraz kąt nachylenia cięciwy ( $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  i  $60^\circ$ ).



Rys. 4. Schemat cięgna o poziomej cięciwie

W tabelach 3 i 4 zawarto wyniki rozwiązania ścisłego (rozw. ścisłe) i rozwiązania uproszczonego 1 (rozw. upr. 1), bazującego na równaniu (3) z pracy [1], natomiast rezultaty dotyczące rozwiązania MES (rozw. MES) i rozwiązania uproszczonego 2 (rozw. upr. 2) pochodzą z obliczeń autorów. Wszystkie wartości zamieszczone w tabeli 5 zostały wyznaczone przez autorów.

Zamieszczone w tabeli 3 wartości bezwymiarowych przemieszczeń wskazują na dobrą, z analitycznym, ścisłym rozwiązaniem, zgodność obu metod uproszczonych oraz Metody Elementów Skończonych w zakresie kątów nachylenia cięciwy nieprzekraczających  $45^\circ$ . Największe odchylenia od rozwiązania ścisłego, związane nie tylko



z dużą wartością kąta nachylenia, ale również dużą wartością zwisu ciężna sięgają w rozwiązaniach uproszczonych 1 i 2 odpowiednio 5,3% i 6,6%. Rozwiązanie MES w tym samym przypadku różni się o 1,1%. Zdecydowanemu pogorszeniu ulegają wyniki obliczeń uproszczonych przy kącie nachylenia 60°. Tym razem największe różnice to 19,0% w przypadku rozwiązania uproszczonego 1 oraz 21,1% w rozwiązaniu uproszczonym 2. Rozwiązanie MES jest zdecydowanie lepsze, ponieważ różni się zaledwie o 3,7% od rozwiązania ścisłego.

TABELA 3

Wartości bezwymiarowego zwisu ciężna ( $u/L_s$ ) oraz procentowe odchylenie wartości przybliżonych od wyników ścisłych w zależności od bezwymiarowej długości początkowej ciężna ukośnego ( $s_0/L_s$ ) oraz kąta nachylenia ciężni do poziomu ( $\alpha$ )

$s_0/L_s$	Wartości $u/L_s$				Odchylenie wartości od rozwiązania ścisłego		
	rozw. ścisłe	rozw. upr. 1	rozw. upr. 2	rozw. MES	rozw. upr. 1	rozw. upr. 2	rozw. MES
kąt nachylenia ciężni ( $\alpha$ ) — 15°							
1,0010	0,039	0,039	0,039	0,040	0,0%	0,7%	1,5%
1,0025	0,044	0,044	0,044	0,045	0,0%	0,9%	1,6%
1,0050	0,053	0,053	0,053	0,053	0,0%	-0,9%	-0,4%
1,0100	0,067	0,067	0,067	0,067	0,0%	-0,1%	0,2%
1,0250	0,100	0,099	0,100	0,101	-1,0%	0,3%	0,6%
1,0500	0,141	0,138	0,141	0,142	-2,1%	0,0%	0,6%
kąt nachylenia ciężni ( $\alpha$ ) — 30°							
1,0010	0,038	0,038	0,038	0,038	0,0%	0,2%	0,1%
1,0025	0,043	0,043	0,043	0,043	0,0%	1,0%	0,8%
1,0050	0,052	0,052	0,052	0,052	0,0%	-0,4%	-0,6%
1,0100	0,066	0,066	0,066	0,066	0,0%	0,6%	0,3%
1,0250	0,099	0,099	0,100	0,099	0,0%	1,0%	0,4%
1,0500	0,138	0,139	0,141	0,139	0,7%	2,1%	0,9%
kąt nachylenia ciężni ( $\alpha$ ) — 45°							
1,0010	0,036	0,036	0,036	0,036	0,0%	0,2%	0,1%
1,0025	0,042	0,042	0,042	0,042	0,0%	-0,6%	-0,7%
1,0050	0,050	0,050	0,051	0,050	0,0%	1,0%	0,3%
1,0100	0,064	0,065	0,066	0,065	1,6%	2,5%	1,2%
1,0250	0,096	0,099	0,100	0,097	3,1%	3,8%	0,9%
1,0500	0,132	0,139	0,141	0,134	5,3%	6,6%	1,1%

cd. tabeli 3

kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 60°							
1,0010	0,033	0,033	0,033	0,033	0,0%	0,1%	-0,7%
1,0025	0,039	0,039	0,039	0,039	0,0%	0,7%	-0,5%
1,0050	0,047	0,048	0,049	0,048	2,1%	3,6%	1,5%
1,0100	0,061	0,064	0,064	0,062	4,9%	5,7%	1,7%
1,0250	0,089	0,098	0,099	0,091	10,1%	11,3%	2,0%
1,0500	0,116	0,138	0,140	0,120	19,0%	21,1%	3,7%

Wyniki zawarte w tabeli 4 mogą sugerować lepszą zgodność rozwiązań uproszczonych w przypadku wyznaczania sił niż w przypadku wyznaczania przemieszczeń, ponieważ uzyskano mniejsze wartości odchylenia pomiędzy rozwiązaniami przybliżonymi a rozwiązaniem ścisłym. Jednak w odniesieniu do rozwiązania uzyskanego przy zastosowaniu uproszczenia 2 są to wnioski mylne. Jest to przypadkowo dobra zgodność, o czym można się przekonać, śledząc wartości maksymalnej siły naciągu cięzna, kluczowej w procesie projektowania konstrukcji (tab. 5).

TABELA 4

Wartości sił naciągu cięzna ( $S$ ) w połowie rozpiętości oraz procentowe odchylenie wartości przybliżonych od wyników ścisłych w zależności od bezwymiarowej długości początkowej cięzna ukośnego ( $s_0/L_s$ ) oraz kąta nachylenia cięciwy cięzna do poziomu ( $\alpha$ )

$s_0/L_s$	Wartości siły $S$ [kN]				Odchylenie wartości od rozwiązania ścisłego		
	rozw. ścisłe	rozw. upr. 1	rozw. upr. 2	rozw. MES	rozw. upr. 1	rozw. upr. 2	rozw. MES
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 15°							
1,0010	153,8	154,2	154,8	153,7	0,3%	0,6%	-0,1%
1,0025	135,8	136,2	137,0	135,7	0,3%	0,9%	-0,1%
1,0050	114,8	115,2	116,1	114,5	0,3%	1,2%	-0,2%
1,0100	90,2	90,6	91,8	89,7	0,4%	1,8%	-0,5%
1,0250	60,3	60,8	62,6	59,4	0,8%	3,9%	-1,5%
1,0500	42,9	43,6	46,2	42,0	1,6%	7,7%	-2,0%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 30°							
1,0010	142,3	142,4	142,9	142,2	0,1%	0,4%	-0,1%
1,0025	125,0	124,9	125,6	124,7	-0,1%	0,4%	-0,2%
1,0050	104,7	104,8	105,6	104,6	0,1%	0,9%	-0,1%
1,0100	81,8	81,9	82,9	81,6	0,1%	1,4%	-0,2%

cd. tabeli 4

1,0250	54,7	54,6	56,3	54,3	-0,2%	2,9%	-0,8%
1,0500	39,3	39,1	41,5	38,6	-0,5%	5,5%	-1,8%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 45°							
1,0010	122,8	122,7	123,1	123,1	-0,1%	0,3%	0,2%
1,0025	106,3	106,0	106,6	106,6	-0,3%	0,3%	0,2%
1,0050	88,2	87,7	88,4	88,4	-0,6%	0,2%	0,2%
1,0100	68,4	67,6	68,5	68,6	-1,2%	0,2%	0,3%
1,0250	46,1	44,7	46,1	46,2	-3,0%	0,0%	0,3%
1,0500	33,6	32,0	33,9	33,9	-4,8%	0,9%	1,0%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 60°							
1,0010	95,3	94,8	95,0	96,0	-0,5%	-0,3%	0,7%
1,0025	80,6	79,7	80,0	81,3	-1,1%	-0,7%	0,9%
1,0050	65,8	64,3	64,8	66,5	-2,3%	-1,6%	1,1%
1,0100	50,9	48,6	49,3	51,7	-4,5%	-3,2%	1,6%
1,0250	35,2	31,8	32,8	36,4	-9,7%	-6,9%	3,4%
1,0500	26,9	22,6	24,0	28,7	-16,0%	-10,7%	6,5%

Rezultaty z tabeli 5 jednoznacznie wskazują na ograniczoną przydatność rozwiązania uproszczonego 2. Występujące różnice pomiędzy tym rozwiązaniem i rozwiązaniem ścisłym są zdecydowanie za duże, sięgają nawet 58,8% w przypadku cięgien nachylonych pod znacznym kątem (tzw. stromych cięgien). Rozwiązania dotyczące zastosowania MES charakteryzują się w tym porównaniu dobrą zgodnością. Maksymalna różnica w odniesieniu do rozwiązania ścisłego to 9,9%. Największe odchylenie od wyników ścisłych następuje w przypadku znacznych kątów nachylenia cięgien oraz dużych zwisów.

TABELA 5

Wartości maksymalnych sił naciągu cięgien ( $S_{\max}$ ) oraz procentowe odchylenie wartości przybliżonych od wyników ścisłych w zależności od bezwymiarowej długości początkowej cięgna ukośnego ( $s_0/L_s$ ) oraz kąta nachylenia cięciwy cięgna do poziomu ( $\alpha$ )

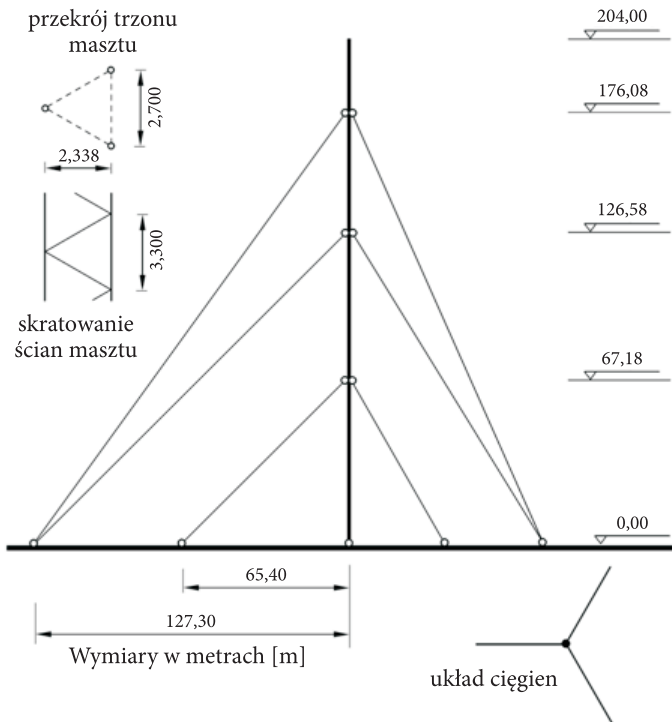
$s_0/L_s$	Wartości $S_{\max}$ [kN]			Odchylenie wartości od rozwiązania ścisłego	
	rozw. ścisłe	rozw. upr. 2	rozw. MES	rozw. upr. 2	rozw. MES
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 15°					
1,0010	163,6	154,8	166,2	-5,4%	1,5%

cd. tabeli 5

1,0025	145,2	137,0	148,3	-5,7%	2,1%
1,0050	124,3	116,1	127,2	-6,6%	2,3%
1,0100	100,2	91,8	102,5	-8,4%	2,3%
1,0250	72,1	62,6	72,8	-13,1%	1,1%
1,0500	56,7	46,2	56,2	-18,5%	-0,9%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 30°					
1,0010	157,3	142,9	156,2	-9,2%	-0,7%
1,0025	141,2	125,6	139,0	-11,1%	-1,6%
1,0050	120,4	105,6	119,2	-12,3%	-1,0%
1,0100	98,0	82,9	96,7	-15,4%	-1,3%
1,0250	72,7	56,3	70,6	-22,6%	-2,9%
1,0500	59,2	41,5	56,2	-30,0%	-5,1%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 45°					
1,0010	142,8	123,1	141,9	-13,8%	-0,7%
1,0025	126,1	106,6	125,5	-15,5%	-0,5%
1,0050	109,2	88,4	107,6	-19,1%	-1,5%
1,0100	89,9	68,5	88,3	-23,8%	-1,8%
1,0250	69,5	46,1	66,8	-33,7%	-4,0%
1,0500	59,4	33,9	55,4	-42,9%	-6,8%
kąt nachylenia cięciwy ( $\alpha$ ) — 60°					
1,0010	119,5	95,0	118,3	-20,4%	-1,0%
1,0025	105,3	80,0	103,8	-24,0%	-1,4%
1,0050	91,2	64,8	89,2	-28,9%	-2,2%
1,0100	77,4	49,3	74,6	-36,3%	-3,6%
1,0250	64,0	32,8	59,8	-48,8%	-6,5%
1,0500	58,3	24,0	52,5	-58,8%	-9,9%

## 5. Przykład obliczeń konstrukcji złożonej

Przykład dotyczy analizy statycznej masztu z odciągami, w której za przedmiot obliczeń przyjęto konstrukcję masztu Przysucha–Kozłowiec [7]. Schemat statyczny konstrukcji pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat konstrukcji masztu z odciągami

Ponieważ celem analizy było porównanie różnych metod obliczeń, ograniczono się do zaledwie jednego przypadku obciążenia masztu polegającego na uwzględnieniu ciężaru własnego konstrukcji łącznie z wyposażeniem. Wykonane zostały obliczenia MES oraz obliczenia uwzględniające rozwiązanie uproszczone 2. Za wyniki stanowiące podstawę do porównań przyjęto rezultaty uzyskane przy pomocy sprawdzonego narzędzia analizy konstrukcji cięgnowych, programu MAST [2], w którym rozwiązanie konstrukcji odwołuje się do założeń zbieżnych z równaniem (1).

Wybrane rezultaty, przedstawione w tabeli 6 potwierdzają prawidłowość wykonanej analizy MES. Różnice pomiędzy wynikami analizy MES oraz analizy programem MAST w zakresie wyznaczania sił w cięgnach oraz maszcie są bardzo małe (poniżej 0,4%). W przypadku porównania wyników pomiędzy rozwiązaniem uproszczonym 2 i rozwiązaniem MAST można zauważyć różnice ok. 5%. Z praktycznego punktu widzenia to również nie są duże różnice. Wyniki pokazane wcześniej w tabeli 5 mogą sugerować konieczność wystąpienia w zadaniu złożonym większych różnic. Powodem małej (5%) różnicy jest brak wstępnego zwisu cięgna. Cięgna w omawianym zadaniu zostały wstępnie napięte i zmiana długości cięgna od siły napinającej jest zdecydowanie większa od wydłużenia, jakie mogłoby powstać przy próbie uwzględnienia składowej podłużnej obciążenia cięgien.

TABELA 6

Wybrane wartości sił i przemieszczeń w analizowanym modelu masztu

Wielkości	Wartości (siły [kN], przemieszczenia [m])			Odchylenie wartości od rozwiązania MAST	
	rozw. MAST	rozw. upr. 2	rozw. MES	rozw. upr. 2	rozw. MES
$S_{\max}$ — cięgna górne	110,74	105,036	110,455	5,2%	0,3%
$S_{\min}$ — cięgna górne	99,42	105,036	99,195	-5,6%	0,2%
$S_{\max}$ — cięgna środkowe	77,12	72,832	76,856	5,6%	0,3%
$S_{\min}$ — cięgna środkowe	68,98	72,832	68,762	-5,6%	0,3%
$S_{\max}$ — cięgna dolne	43,83	41,594	43,665	5,1%	0,4%
$S_{\min}$ — cięgna dolne	39,51	41,594	39,372	-5,3%	0,4%
$u_{\max}$ /trzon/	-0,0451	-0,0442	-0,0453	2,0%	-0,4%
$R_v$ /trzon/	1260,09	1232,04	1258,73	2,2%	0,1%

$S_{\max}$ ,  $S_{\min}$  — wartości ekstremalnych sił normalnych w cięgnach,  
 $u_{\max}$  /trzon/ — przemieszczenie pionowe w najwyższym punkcie trzonu masztu,  
 $R_v$  /trzon/ — pionowa reakcja podporowa trzonu masztu.

## 6. Podsumowanie

Przeprowadzone obliczenia oraz porównanie rezultatów, jakie uzyskano przy zastosowaniu Metody Elementów Skończonych, oraz obliczeń odwołujących się do analitycznych równań cięgna, pozwalają na sformułowanie uwag dotyczących stosowania Metody Elementów Skończonych w rozwiązywaniu zagadnień statyki konstrukcji cięgnowych.

1. Wyniki obliczeń konstrukcji cięgnowych Metodą Elementów Skończonych wykazują bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniami odwołującymi się do *ściśłego równania cięgna*.
2. Wraz ze wzrostem długości początkowej cięgna w stosunku do długości cięciwy, różnice pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i rozwiązaniem MES wzrastają. W przypadku cięgien o dużym zwisie różnice w wartościach przemieszczeń oraz sił sięgają kilku procent. Jednak w większości praktycznych zastosowań ustrojów cięgnowych duże zwisy cięgien nie występują.
3. Metoda Elementów Skończonych jako uniwersalne narzędzie obliczeniowe pozwala na wszechstronną analizę konstrukcji, jednak na etapie rozwiązywania nieliniowego zadania statyki konstrukcji cięgnowych można napotkać problemy numeryczne dotyczące zbieżności procesu obliczeniowego. Początkowe przyrosty obciążenia, w przypadku wielu analiz, muszą być przyjęte na poziomie  $10^{-6}$  wartości obciążenia.

4. W konsekwencji stosowania MES konieczne jest dyskretne modelowanie cięgien w postaci układu wielu elementów skończonych, co w połączeniu z tzw. „wolną zbieżnością” skutkuje większym kosztem obliczeniowym niż w przypadku zastosowania metod odwołujących się do równań cięgien (ściśłego lub przybliżonych).
5. Sterowanie długością początkową cięgien oraz ich ewentualne napinanie może być realizowane poprzez odpowiednie obciążenie konstrukcji temperaturą.
6. Mimo trudności obliczeniowych przy wykorzystaniu MES możliwe jest prawidłowe określenie odpowiedzi konstrukcji cięgienowych na zadane obciążenie. Jednak należy zwrócić uwagę na prawidłowy sposób modelowania obciążenia.

Artykuł wpłynął do redakcji 22.12.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w kwietniu 2010 r.

#### LITERATURA

- [1] SZ. PAŁKOWSKI, *Konstrukcje cięgienowe*, WNT, Warszawa, 1994.
- [2] SZ. PAŁKOWSKI, *Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania*, PWN, Warszawa, 2009.
- [3] M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa–Poznań, 1985.
- [4] K. L. BATHE, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [5] T. BELYTSCHKO, W. K. LIU, B. MORAN, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, 2000.
- [6] *ABAQUS Analysis User's Manual*, Simulia, Providence, RI, USA, 2008.
- [7] M. MATUSZKIEWICZ, SZ. PAŁKOWSKI, *Analiza statyczna masztu z uwzględnieniem zerwania odciągu*, *Inżynieria i Budownictwo*, 4, 2007, 196-198.

M. RUCHWA, M. MATUSZKIEWICZ

#### Application of Finite Elements Method in static analysis of cable structures

**Abstract.** The Finite Elements Method allows for comprehensive structural analysis, however, in the case of cable structures its potential is not fully used due to problems in arriving at convergence of solutions and pertaining to compatibility of FEM and analytical calculation results. In this paper, numerical results, originating from the Finite Elements Method with the analytical calculation results, in terms of nonlinear structural analysis, were compared and conclusions that can be useful in numerical handling of such type problems were formulated. Examples pertaining to the analysis of single cables of variable slack values, bowstring inclination angle and loading methods were being calculated. Also an example of a complex structure in calculation of which the previously mentioned features appeared was analysed; furthermore, cooperation between many cables with traditional rod structure elements was considered. Solving the problems through application of the Finite Elements Method, primary types of finite elements, linear elastic relationship, various static loads as well as slack and cable prestressing, geometric nonlinearity, cooperation between cable elements and other structural

elements and also typical incremental methods used in static analysis, were applied. The calculation tool used here was ABAQUS software. In the summary, attention was focused on conformities and differences in FEM and analytical calculation results regarding distribution of the displacements and cross-sectional forces obtained in the basic and complex examples of analyses.

**Keyword:** static, cable structures, Finite Elements Method

**Universal Decimal Classification:** 621.86.065